

Иванов Д. Х.
D. Kh. Ivanov

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО МНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

NUMERICAL IDENTIFICATION OF A NONSTATIONARY MULTIPLIER IN THE RIGHT-HAND SIDE OF ANOMALOUS DIFFUSION EQUATION

Иванов Дьулус Харлампович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Дальневосточного центра математических исследований Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова (Россия, Якутск); ул. Кулаковского, 48, Якутск, Россия. E-mail: djulus.ivanov@yandex.ru.

Dulus Kh. Ivanov – PhD in Physics and Mathematics, Research Assistant, Yakutsk Branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center «Far Eastern Center for Mathematical Research», North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov (Russia, Yakutsk); Kulakovskogo Str., 48, Yakutsk, Russia. E-mail: djulus.ivanov@yandex.ru.

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения аномальной диффузии в ограниченной области. Вместо частной производной по времени берётся производная дробного порядка α ($0 < \alpha < 1$) в смысле Герасимова – Капуто. Для аппроксимации дробной производной используется классическая линеаризация. Аппроксимация по времени выполнена с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для аппроксимации по пространству используем метод конечных элементов. Для восстановления зависящей от времени множителя правой части строится вычислительный алгоритм на основе специальной декомпозиции дискретного аналога задачи с решением двух сеточных эллиптических задач. Незвестный множитель итерационно вычисляется на каждом временном слое по данным наблюдения. На модельных задачах представлены возможности предложенного вычислительного алгоритма.

Summary. In this article we consider initial-boundary value problem for anomalous diffusion equation in a finite region. In contrast to partial time derivative, the Gerasimov-Caputo fractional derivative of order α ($0 < \alpha < 1$) is taken. To approximate the fractional derivative, traditional linearization is used. Approximation on time is performed by using implicit finite-difference scheme. We use finite element method to approximate on space variables. We construct a computational algorithm to restore a time-dependent factor of the right-hand side occurring in anomalous diffusion equation. The algorithm is based on a special decomposition of a discrete analogue of the problem into solution of two grid elliptic problems. The unknown factor is determined for every time iteration from observations of the solution. Capabilities of the proposed algorithm are presented on several model problems.

Ключевые слова: обратная задача, аномальная диффузия, дробная производная, метод конечных разностей, метод конечных элементов.

Key words: inverse problem, anomalous diffusion, fractional derivative, finite difference method, finite element method.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1441.

УДК 519.642.2

Введение. Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка возникают во многих прикладных задачах физики, биологии, экономики [3; 5; 8; 9]. Аномальная диффузия возникает, например, при описании движения частиц в среде, имеющей сильно фрактальную структуру, взамен классического броуновского движения, или при описании фильтрации

жидкости в пористой среде [5]; рекомендуется посмотреть работу [11] и библиографический список в ней.

Аномальная диффузия делится на два класса в зависимости от порядка дробной производной. Субдиффузия соответствует случаю, когда берётся дробная производная по времени порядка $\alpha \in (0,1)$. Супердиффузия соответствует случаю, когда берётся дробная производная по времени порядка $\alpha \in (1,2)$, также известна как волновое уравнение дробного порядка [6].

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных хорошо изучена [4; 10]. При рассмотрении нестационарных задач отдельно выделяются задачи по восстановлению коэффициентов, зависящих по времени или по пространственным переменным. В последнее время возникает большой интерес к решению обратных задач восстановления коэффициентов уравнения аномальной диффузии, граничных или начальных условий, а также дробного порядка по дополнительным информациям [7; 12].

В работе [1] представлен метод восстановления нестационарного младшего коэффициента параболического уравнения на основе декомпозиции задачи с решением двух сеточных эллиптических задач. Такой подход был применён для идентификации правой части, зависящей от времени, для параболического уравнения [2].

В данной работе рассматривается решение обратной задачи по восстановлению нестационарного множителя в правой части уравнения субдиффузии.

Постановка задачи. Пусть функция $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset R^n$, $0 < t \leq T$, $T > 0$, удовлетворяет нелокальному уравнению аномальной диффузии с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \nabla \cdot (k(x, t) \nabla u) + p(t) f(x, t), x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где коэффициент диффузии $k(x, t) \geq \kappa > 0$, функция источника в правой части представляет собой произведение функции $p(t)$, зависящей только от времени, и пространственно-временной функции $f(x, t)$.

Полная граница области $\partial\Omega$ разделена на части Γ_D и Γ_R , $\Gamma_D \cup \Gamma_R = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_R = \emptyset$. На Γ_D задаётся граничное условие первого рода (Дирихле):

$$u(x, t) = \mu_D(x, t), x \in \Gamma_D, 0 < t \leq T,$$

на Γ_R – граничное условие третьего рода (Робин):

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} = \beta(u - \mu_R(x, t)), x \in \Gamma_R, 0 < t \leq T,$$

где n – вектор внешней нормали к границе. Уравнение (1) дополняется начальным условием:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega.$$

Коэффициент $\beta > 0$ и функции $\mu_D(x, t)$, $\mu_R(x, t)$ и $u_0(x)$ считаются известными.

Дробная производная по времени порядка α , $0 < \alpha < 1$, рассматривается в смысле Герасимова – Капуто [3]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds,$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$ – гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим обратную задачу, где в уравнении (1) функция $p(t)$ подлежит идентификации. Дополнительная информация рассматриваемой обратной начально-краевой задачи обычно задаётся в некоторой внутренней точке $x_o \in \Omega$: $u(x_o, t) = \phi(t)$, $0 < t \leq T$. В более общем случае рассматривается нелокальное наблюдение $\int_\Omega \xi(x) u(x, t) dx = \phi(t)$, $0 < t \leq T$. Среди них также выделим средневзвешенное решение на границе Γ_R : $\frac{1}{l(\Gamma_R)} \int_{\Gamma_R} u(x, t) dx = \phi(t)$, $0 < t \leq T$, где $l(\Gamma_R)$ – длина границы.

Вычислительный алгоритм. Разобьём интервал $[0, T]$ на N одинаковых отрезков: $\omega_\tau = \{t_j: t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N; \tau = T/N\}$. Построим триангуляцию ω_h в области Ω , где h – характеристическая длина сетки, минимальный из диаметров n -мерных сфер, вписанных в ячейки триангуляции.

Для вычисления дробной производной Герасимова – Капуто используем стандартную аппроксимацию [13]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t_j) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^j \frac{u(x, t_{j-k+1}) - u(x, t_{j-k})}{\tau} \frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} (k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}).$$

Упрощая выражение, получаем, что для вычисления дробной производной необходимо просуммировать состояния за предыдущие шаги с убывающими по абсолютной величине весами:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t_j) \approx g_\alpha \sum_{k=0}^j c_k u(x, t_{j-k}),$$

где введено обозначение $g_\alpha = 1/(\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha)$, а веса находятся по следующим формулам:

$$v_1 = 1, v_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^\alpha, k = 2, 3, \dots, N, \\ c_0 = v_1, c_k = v_{k+1} - v_k, k = 1, 3, \dots, j-1, c_j = -v_j.$$

Нетрудно заметить, что все веса c_k , кроме c_0 , будут отрицательными.

Введём конечномерное гильбертово пространство $V^h \subset L_2(\Omega)$ с введёнными стандартными скалярным произведением и нормой: $(u, v) = \int_\Omega u v dx$, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Пространство $V_0^h \subset V^h$ является подпространством функций, обращающихся в нуль на границе Γ_D : $V_0^h = \{u \in V^h: u(x) = 0, x \in \Gamma_D\}$. Дополнительно введём обозначение для скалярного произведения по границе S : $(u, v)_S = \int_S u v ds$.

При численном решении рассматриваемой начально-краевой задачи для нелокального уравнения аномальной диффузии используем неявную разностную схему по времени. Для дискретных аналогов функций и коэффициентов введём следующие обозначения: $u^j = u(x, t_j)$, $p^j = p(t_j)$, $f^j = f(x, t_j)$, $k^j = k(x, t_j)$, $\mu_D^j = \mu_D(x, t_j)$, $\mu_R^j = \mu_R(x, t_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Вариационная формулировка запишется следующим образом: найти функции $u^j \in V^h$, $j = 1, 2, \dots, N$ таких, что $\forall v \in V_0^h$:

$$g_\alpha(u^j, v) + (k^j \nabla u^j, \nabla v) + \beta(u, v)_{\Gamma_R} = -g_\alpha \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} (u^k, v) + \beta(\mu_R, v)_{\Gamma_R}.$$

Начальное условие $(u^0, v) = (u_0, v)$, $\forall v \in V_0^h$, граничное условие $u^j(x) = \mu_D^j(x)$, $x \in \partial\omega_h^D$, где $\partial\omega_h^D$ – множество граничных узлов сетки, соответствующих границе Γ_D . При использовании конечных элементов более высокого порядка граничное условие первого рода ставится для всех степеней свободы, лежащих на границе. Заметим, что в правую часть входят состояния решения за все предыдущие временные слои.

Вычислительный алгоритм определения неизвестной функции $p(t)$ базируется на специальной декомпозиции решения на новом временном слое: $u^j(x) = v^j(x) + p^j w^j(x)$.

На каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, N$ вспомогательные функции $v^j(x)$ и $w^j(x)$ находятся из решения эллиптических задач со следующими вариационными формулировками: найти функцию $v^j \in V^h$ такую, что

$$g_\alpha(v^j, v) + (k^j \nabla v^j, \nabla v) + \beta,$$

$$v^j(x) = \mu_D^j(x), x \in \partial\omega_h^D,$$

найти функцию $w^j \in V^h$ такую, что

$$g_\alpha(w^j, v) + (k^j \nabla w^j, \nabla v) + \beta,$$

$$w^j(x) = 0, x \in \partial\omega_h^D.$$

При введённой декомпозиции искомая задача выполняется для любого значения p . Уточнение происходит из дополнительной информации так, что

$$p^j = \frac{\varphi^j - v^j(x_o)}{w^j(x_o)},$$

при условии $w^j(x_o) \neq 0$, где $\varphi^j = \Phi(t_j)$ – дискретный аналог данных локального наблюдения. Аналогичная формула получится, если у нас нелокальное наблюдение:

$$p^j = \frac{\varphi^j - \int_{\Omega} \xi(x) v^j(x) dx}{\int_{\Omega} \xi(x) w^j(x) dx}.$$

В этом случае необходимо потребовать, чтобы $\int_{\Omega} \xi(x) w^j(x) dx \neq 0$. После этого находится само решение на текущем временном слое u^j по формуле декомпозиции.

Для выполнения условия на знаменатель вышеупомянутой формулы потребуем, чтобы функция в правой части $f(x, t)$ была знакопостоянной, например $f(x, t) \geq 0$.

Численные результаты. Расчётная область и сетка отображены на рис. 1, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Будем использовать конечные элементы первого порядка, при этом функция приближается кусочно-линейными базисными функциями, определёнными на ячейках триангуляции ω_h .

Рассматривается следующая задача: $T = 0,1$, дробный порядок равен $\alpha = 0,5$,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \Delta u = p(t)f(x, t), x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = 1, x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 1, x \in \Gamma_D, 0 < t \leq T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 2, x \in \Gamma_R, 0 < t \leq T,$$

где Γ_D – внешняя граница, Γ_R – внутренняя (см. рис. 1).

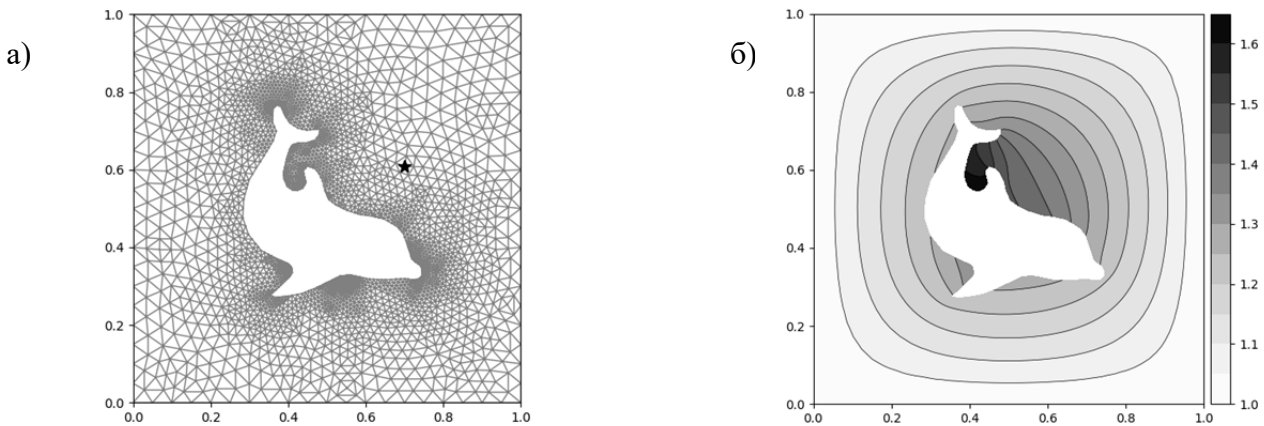


Рис. 1. Расчётная область, сетка и точка наблюдения (а)
и решение в финальный момент времени (б)

В правой части $f(x, t) = 1 + x_1 x_2$, а точное значение функции $p(t)$ задаётся так:

$$p(t) = \frac{1000t}{1 + \exp(\gamma(t - T/2))}.$$

При увеличении параметра γ функция $p(t)$ приближается к разрывной функции в точке $T/2$.

Рассматривается два случая ведения дополнительной информации $\phi(t)$: 1) решение в точке x_0 , на рис. 1, a обозначено чёрной звездой; 2) среднее значение решения по границе Γ_R . Данные наблюдения находятся путём решения прямой задачи с более мелким временным шагом $\tau = T/N$, $N = 200$ при заданных коэффициентах и функциях. Решение при $\gamma = 100$ в финальный момент времени T изображено на рис. 1, b .

График функции $p(t)$ при различных параметрах γ представлен на рис. 2, a . Заметим, что при заданных стационарных функциях $k(x)$ и $f(x)$ вспомогательная задача для $w(x)$ решается только один раз (см. рис. 2, b). Видно, что внутри квадрата функция w принимает положительные значения и обращение в ноль знаменателя при восстановлении функции p не происходит.

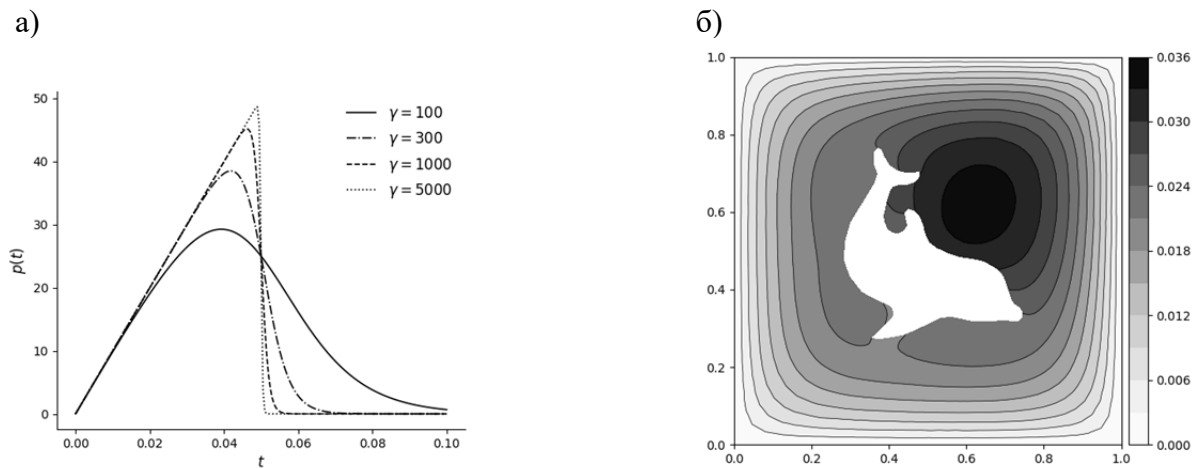


Рис. 2. Точная функция $p(t)$ (а) и пример вспомогательной функции $w(x)$ при $\gamma = 100$ и $N = 50$ (б)

Исследуется решение обратной задачи при различных шагах по времени: $N = 25, 50, 100$. Ошибки восстановления нестационарной функции $p(t)$, $\varepsilon(t) = \hat{p}(t) - p(t)$, где $\hat{p}(t)$ – найденная по алгоритму приближённая функция, представлены на рис. 3. Алгоритм достаточно хорошо справляется как для локального наблюдения, так и для нелокального. При $\gamma = 100$, когда восстанавливается плавно меняющаяся функция p , в обоих наблюдениях видно, что большая ошибка аппроксимации наблюдается в начале времени. Возможно, это связано тем, что в начальный момент времени нет памяти о том, что система покоилась. Для более резко меняющейся функции ($\gamma = 1000$) большие ошибки заключены в области разрыва (см. рис. 4).

На практике данные наблюдения имеют некоторый шум, для моделирования такого случая добавим синтетический шум следующим образом:

$$\phi_\delta(t) = \phi(t) + \delta \max_{s \in [0, T]} |\phi(s)| : (2\sigma(t) - 1),$$

где случайное число $\sigma(t)$ берётся из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$; δ – уровень шума. Полученные результаты восстановления неизвестной функции при уровне шума 5 % для локального и нелокального наблюдений показаны на рис. 5, $N = 50$.

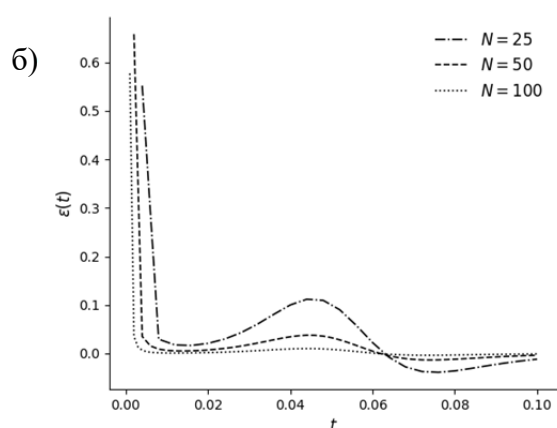
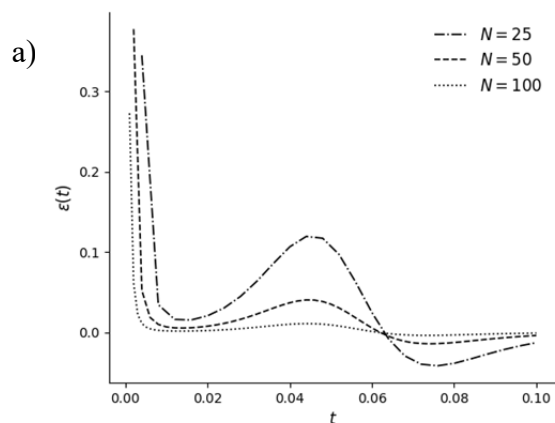


Рис. 3. Ошибка восстановленной функции $\varepsilon(t) = p(t) - p_e(t)$ для $\gamma = 100$:
а – локальное наблюдение в точке x_0 ; б – нелокальное наблюдение на границе Γ_R

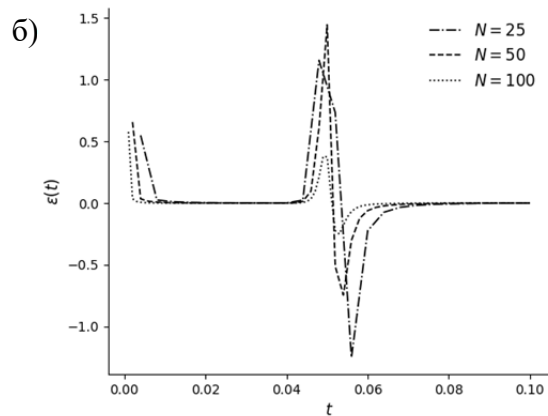
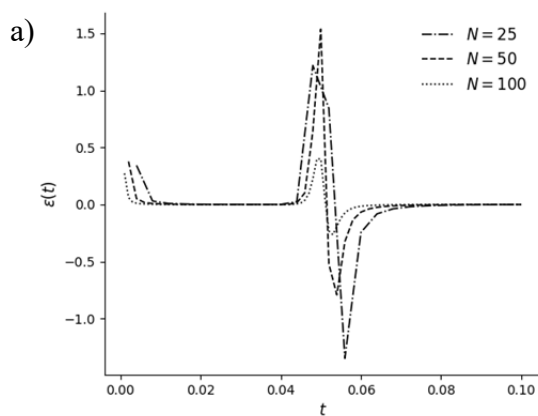


Рис. 4. Ошибка восстановленной функции $\varepsilon(t) = p(t) - p_e(t)$ для $\gamma = 1000$:
а – локальное наблюдение в точке x_0 ; б – нелокальное наблюдение на границе Γ_R

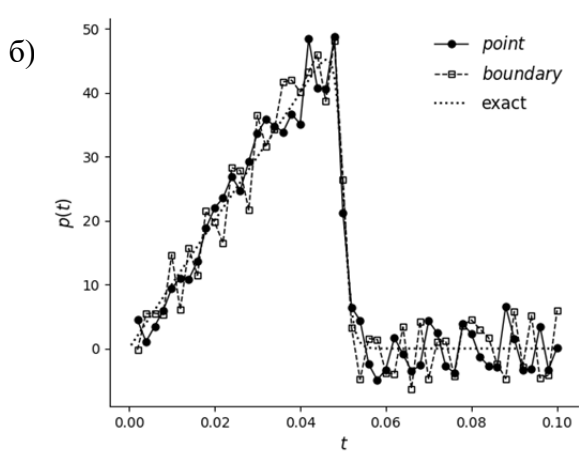
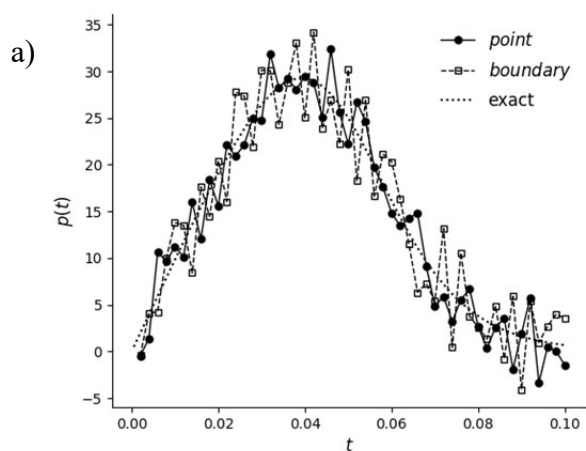


Рис. 5. Восстановленная функция $p(t)$ при зашумлении
данных наблюдения с уровнем шума $\delta = 0,05$: а – $\gamma = 100$; б – $\gamma = 1000$

Заключение. Предложен вычислительный алгоритм восстановления нестационарного множителя в правой части уравнения субдиффузии. Вычисление неизвестной функции сводится к решению двух сеточных эллиптических задач на каждом временном слое и использованию заданной дополнительной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 455 (3). – С. 258-260.
2. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев, М. В. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55 (6). – С. 1020-1020.
3. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
4. Isakov, V. Inverse problems for partial differential equations / V. Isakov // Springer. – 2006.
5. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // Elsevier. – 2006.
6. Mainardi, F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models / F. Mainardi // World Scientific. – 2022.
7. Miller, L. Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation / L. Miller, M. Yamamoto // Inverse Problems. – 2013. V. 29 (7). P. 075013.
8. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier // Academic Press, New York. – 1974.
9. Podlubny, I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications / I. Podlubny // Elsevier. – 1998.
10. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin // N.Y.: Marcel Dekker. – 2000.
11. Pskhu, A. Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics / A. Pskhu, S. Rekhviashvili // Mathematics. – 2020. V. 8 (11). P. 2086.
12. Su, L. A numerical method for solving retrospective inverse problem of fractional parabolic equation / L. Su, J. Huang, V. Vasil'ev, A. Li, A. Kardashevsky // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. V. 413. P. 114366.
13. Zhuang, P. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation / P. Zhuang, F. Liu // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2006. V. 22. P. 87-99.